Σειρές Laurent

Οι σειρές Laurent είναι της μορφής:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^n$$ όπου αναπτύσσοντας

αυτό το άθροισμα, θα παρατηρήσουμε ότι γράφεται ως άθροισμα δύο δυναμοσειρών.

Έτσι,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} (z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n.$$

η οποία συγκλίνει αν.ν οι δύο σειρές που διασπάται συγκλίνουν ταυτόχρονα

Πρόταση:

Η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n < +\infty$ για κάθε z όπου ανήκει στη δακτυλιοειδή περιοχή $\Delta(a; r_1, r_2)$ όπου: $r_1 := \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|}$

και $r_2 := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}}$.

Απόδειξη

Η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n < +\infty$ αν.ν
οι δύο σειρές:
$\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-a)^{-n}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n < +\infty$

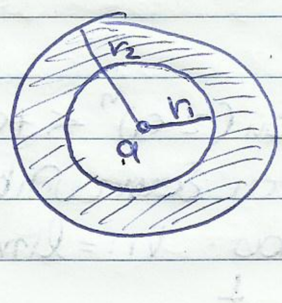
Η πρώτη συγκλίνει όταν
$\lambda := \limsup \sqrt[n]{\underbrace{|b_{-n}||z-a|^{-n}}_{|\gamma_n|}} < 1$ (Κρ. n-οστης ρίζας Cauchy)

$\Rightarrow \lambda := \frac{1}{|z-a|} \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} < |z-a|$

Η δεύτερη σειρά είναι γνωστή δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει στο δίσκο $B(a, r_2)$ με r_2 ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

Άρα, η δυναμοσειρά Laurent συγκλίνει σε εκείνα τα z για τα οποία
$|z-a| > r_1$ και $|z-a| < r_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow z \in \Delta(a; r_1, r_2)$ (όπου θα πρέπει $r_1 < r_2$)



Παραδείγματα - Εφαρμογές:

1) Ποιος ο δακτύλιος σύγκλισης της δυναμοσειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3+4i)^n (z+2i) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{10^n} ;$$

ΛΥΣΗ

Καταρχάς το κέντρο του Δακτυλίου είναι το $-2i$

Επίσης, $b_{-n} = (3+4i)^n$

Άρα,

$$r_1 = \lim Sup \sqrt[n]{|3+4i|^n} = |3+4i| = 5.$$

(Η σειρά συγκλίνει στο δακτύλιο: $\Delta(-2i; 5, +\infty)$)

Για τη δεύτερη σειρά

$b_n = \frac{1}{10^n}$

Άρα,

$$r_2 = \frac{1}{\lim Sup \sqrt[n]{|b_n|}} = 10$$

Δηλαδή, η δεύτερη σειρά συγκλίνει στο δίσκο $B(-2i, 10)$ όπου $10 > 5$.

Άρα, η σειρά Laurent συγκλίνει στη δακτυλιακή περιοχή $\Delta(-2i; 5, 10)$

2) Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent κέντρου $z_0=1$ η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{3-4z}{3z^2-5z+2}$ όταν $|z-1|>\dfrac{1}{3}$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{3-4z}{3z^2-5z+2}=\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{3z-2} \Leftrightarrow$$

$$3-4z=A(3z-2)+B(z-1) \Leftrightarrow$$

$2A+B=-3$ και $3A+B=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=B=-1$

Αρα, η f αναλυεται ως εξής:

$$f(z)=\frac{3-4z}{3z^2-5z+2}=\frac{-1}{z-1}+\frac{-1}{3z-2}$$

Για την $f_1(z)=\dfrac{1}{3z-2}$ με $|z-1|>\dfrac{1}{3}$

Θέτουμε $z-1=w$

και παίρνουμε

$$f_1(z)=f_1(w+1)=\frac{1}{3(w+1)-2}=\frac{1}{3w-1},\ |w|>\frac{1}{3}$$

αφου $|w|>\dfrac{1}{3} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{3w}\right|<1$ και έτσι προϊδεαζόμαστε να γράψουμε την $\dfrac{1}{3w-1}$ συνάρτηση στη μορφή $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3w}}$ ώστε να χρησιμοποιήσουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\dfrac{1}{1-z}$, $|z|<1$

Είναι λοιπόν

$$\frac{1}{3w-1} = \frac{1/3w}{1-1/3w} = \frac{1}{3w} \cdot \frac{1}{1-1/3w} = \frac{1}{3w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3w}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3w)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \cdot w^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} (z-1)^{-n}$$

για $|z-1| > \frac{1}{3} \Rightarrow f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} (z-1)^{n}$

Τώρα η $f_2(z) = -\frac{1}{z-1}$, είναι ήδη σειρά Laurent με κέντρο το $z_0=1$.

Επομένως,

$b_{-n} = 3^{-n}$.

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}}{(z-1)^n}, \quad |z-1| > \frac{1}{3}$$

ή ισοδύναμα

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -3^{-n} (z-1)^{-n} - \frac{1}{z-1}, \quad |z-1| > \frac{1}{3}$$

3) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά Laurent:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot e^{in} (z+1)^{-n}}_{①} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(in+\frac{1}{2})} (z+1)^{n}}_{②}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ως κέντρο της σειράς το -1

Επίσης, $b_{-n} := 2^{-n} \cdot e^{in}$ με ακτίνα

$r_1 = \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} = \limsup \frac{1}{2} |e^{in}| =$

$= \limsup \frac{1}{2} (\cos^2 n + \sin^2 n) = \frac{1}{2} < 1$

Η σειρά ① συγκλίνει στην ανοιχτή δακτυλική περιοχή $\Delta(-1; \frac{1}{2}, +\infty)$

Έπειτα, $b_n = e^{-(in+\frac{1}{2})}$ με ακτίνα

$r_2 = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}} = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|e^{-in} \cdot e^{-1/2}|}} =$

$= \lim e^{1/2n} = 1$, άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει στον ανοικτό δίσκο $B(-1, 1)$

Συγκεντρωτικά, η σειρά Laurent θα συγκλίνει στη δακτυλική περιοχή $\Delta(-1; \frac{1}{2}, 1)$